Università Ca' Foscari Venezia, Corso di Laurea in Informatica

Esame di Calcolo 2 - *Prof. D. Pasetto*

Tema A - 23/06/2023
Tempo a disposizione: 2h 30min

Cognome .... Nome .... Matricola .... Aula-Posto ....

Norme generali:

- Non girare il foglio fino all'inizio dell'esame.
- Tenere sul tavolo solo lo stretto necessario per l'esame.
- NON è permesso utilizzare libri o quaderni, calcolatrici che facciano grafici o calcolino integrali, telefoni cellulari o altri dispositivi atti a comunicare. È permesso utilizzare un formulario personale scritto su un foglio A4 (fronte/retro).
- Al termine della prova, i docenti passeranno fila per fila per raccogliere gli scritti. Si potrà abbandonare l'aula solo al termine delle operazioni di consegna, rispettando le indicazioni dei docenti.

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione

$$4y'' + y = \mathrm{e}^{-\frac{1}{2}} - 4y' + 289\cos(2x)$$

1.2 Trovare la soluzione che soddisfa le seguenti condizioni di Cauchy e calcolarne il dominio:

$$y(0) = -15 \quad ; \quad y'(0) = 16$$

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = (-t\cos(\pi t), t\sin(\pi t)), \qquad t \in [-\frac{5}{2}\ ,\ \frac{5}{2}];$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare.

2.2 Disegnare il supporto della curva. Indicare il verso di percorrenza.

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = 1$.

2.4 Sia $f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}$. Verificare che il sostegno di $\mathbf{r}_1$ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\mathbf{r}_1} f$

Problema 3 (9 punti)

Sia $f(x,y) = 1 - \sqrt{-x^2 + 2x - \frac{1}{4}y^2}$.

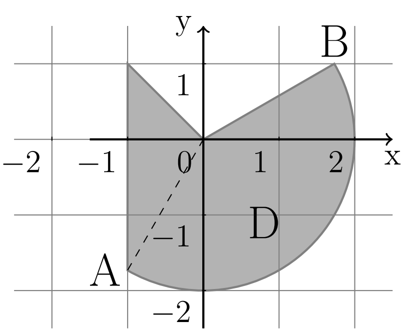
3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico della sezione $y = 0$ e la curva di livello $z = 1/2$.

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella. Determinare l'immagine di f.

3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(1, -1)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor del primo ordine rispetto a tale punto.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0,0)$. I vertici A e B hanno coordinate $A = (-1, -\sqrt{3})$, $B = (\sqrt{3}, 1)$.
Utilizzare gli integrali doppi per calcolare:



$$I_1 = \int\int_D dx\,dy \quad ; \quad I_2 = \int\int_D xy\,dx\,dy$$

Soluzioni

Problema 1 (7 punti)

1.1 Calcolare tutte le soluzioni dell'equazione

$$4y'' + y = e^{-\frac{1}{2}} - 4y' + 289\cos(2x)$$

L'eq. caratteristica dell'eq. omogenea associata è: $4\lambda^2 + 4\lambda + 1 = 0$ che ha soluzione doppia $\lambda = -1/2$. Quindi le soluzioni dell'omogenea associata sono:

$$z(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x}\ , \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

Per trovare la soluzione particolare si usa il metodo di somiglianza:

$$\bar{y}(x) = A\sin(2x) + B\cos(2x) + D, \quad A, B, D \in \mathbb{R}$$

Le cui derivate sono:

$$\bar{y}'(x) = 2A\cos(2x) - 2B\sin(2x)$$
$$\bar{y}''(x) = -4A\sin(2x) - 4B\cos(2x)$$

Sostituendo si ottiene il sistema

$$\begin{cases} -15A - 8B = 0 \\ -15B + 8A = 289 \\ D = e^{-1/2} \end{cases} \implies A = 8; B = -15; D = e^{-1/2}$$

L'integrale generale quindi è:

$$y(x) = C_1 e^{-\frac{1}{2}x} + C_2 x e^{-\frac{1}{2}x} + 8\sin(2x) - 15\cos(2x) + e^{-\frac{1}{2}}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

1.2 Trovare la soluzione che soddisfa le seguenti condizioni di Cauchy e calcolarne il dominio:

$$y(0) = -15 \quad ; \quad y'(0) = 16$$

Bisogna risolvere il sistema

$$\begin{cases} C_1 - 15 + e^{-1/2} = -15 \\ -\frac{1}{2}C_1 + C_2 + 16 = 16 \end{cases} \implies C_1 = -e^{-\frac{1}{2}}; C_2 = -\frac{e^{-\frac{1}{2}}}{2}$$

Quindi la soluzione del problema di Cauchy è

$$y(x) = -e^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} x e^{-\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}} + 8\sin(2x) - 15\cos(2x) + e^{-\frac{1}{2}}, \quad A, B \in \mathbb{R}$$

il cui dominio è $\mathbb{R}$.

Problema 2 (8 punti)

Considerare la curva γ descritta dalla parametrizzazione $\mathbf{r}(t)$:

$$\mathbf{r}(t) = (-t\cos(\pi t), t\sin(\pi t))\,, \qquad t \in [-\frac{5}{2}\ ,\ \frac{5}{2}];$$

2.1 Determinare se γ è continua, chiusa, semplice e regolare. (2 punti)

Continuità, chiusura, semplicità e regolarità si possono dedurre facilmente dal grafico del supporto.

$\mathbf{r}$ è continua.

Si ha $\mathbf{r}(\frac{5}{2}) = (\frac{5}{2}, 0) = \mathbf{r}(-\frac{5}{2})$, quindi γ è chiusa.

Per la semplicità, si cercano due valori (diversi) $t_1, t_2 \in [-5/2, 5/2]$ per cui la curva passi per lo stesso punto:

$$\begin{cases} -t_1\cos(\pi t_1) = -t_2\cos(\pi t_2) \\ t_1\sin(\pi t_1) = t_2\sin(\pi t_2) \end{cases} \implies \begin{cases} t_1^2\cos^2(\pi t_1) = t_2^2\cos^2(\pi t_2) \\ t_1^2\sin^2(\pi t_1) = t_2\sin^2(\pi t_2) \end{cases} \implies \text{(sommando) } t_1^2 = t_2^2$$

quindi deve essere $t_1 = -t_2$ (oppure $t_1 = t_2$, caso ovvio). Quindi:

$$\begin{cases} t_1\cos(\pi t_1) = -t_1\cos(-\pi t_1) \\ t_1\sin(\pi t_1) = -t_1\sin(-\pi t_1) \end{cases} \implies \begin{cases} 2t_1\cos(\pi t_1) = 0 \\ t_1\sin(\pi t_1) = t_1\sin(\pi t_1) \end{cases}$$

dalla prima equazione si ha $\cos(\pi t_1) = 0$ (oppure $t_1 = 0$, caso ovvio $t_1 = t_2 = 0$). Quindi

$$\pi t_1 = \frac{\pi}{2} + k\pi \implies t_1 = \frac{1}{2} + k \quad , \ k \in \mathbb{Z}$$

Nell'intervallo $[-\frac{5}{2}, \frac{5}{2}]$ si ottengono i valori $t_1 = \{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \frac{5}{2}\}$.

Quindi $\mathbf{r}$ non è semplice , perché $\mathbf{r}(1/2) = (0, \frac{1}{2}) = \mathbf{r}(-1/2)$ e $\mathbf{r}(3/2) = (0, -\frac{3}{2}) = \mathbf{r}(-3/2)$

Questo si può anche dedurre dal supporto della curva.

Per la regolarità bisogna calcolare il vettore tangente a $\mathbf{r}$,

$$\mathbf{r}'(t) = (t\pi\sin(\pi t) - \cos(\pi t), t\pi\cos(\pi t) + \sin(\pi t))$$

La velocità di $\mathbf{r}$ è $\|\mathbf{r}'(t)\| = \sqrt{1 + \pi^2 t^2}$, che non si annulla mai, quindi l'arco è regolare.

2.2 Disegnare il supporto della curva. Indicare il verso di percorrenza. (2 punti)

Per $t >= 0$, $\mathbf{r}(t)$ è una curva in forma polare con componente radiale t, quindi il suo supporto è una spirale che parte da $(0, 0)$ e si allarga in senso orario fino al punto $(0, 5/2)$.

Per $t < 0$ si può notare che il supporto si ottiene dal precedente con una simmetria sull'asse y, infatti:

$$\mathbf{r}(-t) = (t\cos(-\pi t), -t\sin(-\pi t)) = (t\cos(\pi t), t\sin(\pi t))$$

dove si nota che, rispetto a $\mathbf{r}(-t)$, la componente x cambia segno, mentre la componente y rimane uguale.

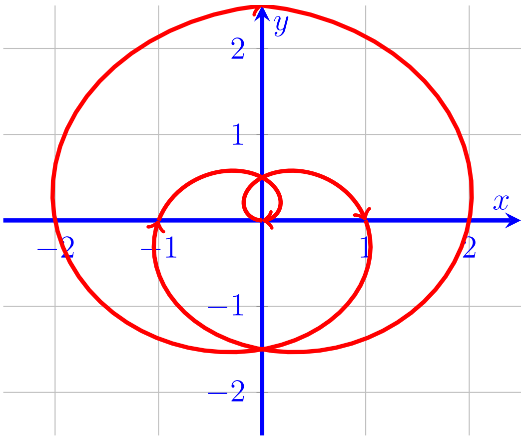


Figura 1: Supporto della curva parametrica ($\mathbf{r}_1$ in rosso e $\mathbf{r}_2$ in verde).

2.3 Scrivere l'equazione cartesiana e parametrica della retta tangente a γ in $t_0 = 1$. (2 punti)

Si ha $\mathbf{r}(1) = (1, 0)$ e $\mathbf{r}'(1) = (1, -\pi)$. Quindi un'eq. della retta tangente è:

$$\begin{cases} x(t) = (t-1) + 1 = t \\ y(t) = -\pi(t-1) \end{cases}$$

2 L'equazione cartesiana è $y = -\pi x + \pi$.

2.4 Sia $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$. Verificare che il sostegno di $\mathbf{r}_1$ è contenuto nel dominio di f e calcolare l'integrale curvilineo $\int_{\mathbf{r}_1} f$ (2 punti)

Il dominio di $f(x, y)$ è $\mathbb{R}^2$, quindi il supporto della curva è contenuto nel dominio

$$\int_{\mathbf{r}_1} f(x,y)\,d\mathbf{s} = \int_{-5/2}^{5/2} f(-t\cos(\pi t), t\sin(\pi t))\|\mathbf{r}'(t)\|\,dt \tag{1}$$
$$= \int_{-5/2}^{5/2} |t|\sqrt{1+\pi^2t^2}\,dt = \tag{2}$$
$$= -\int_{-5/2}^{0} t\sqrt{1+\pi^2t^2}\,dt + \int_{0}^{5/2} t\sqrt{1+\pi^2t^2}\,dt = \tag{3}$$
$$= 2\int_{0}^{5/2} t\sqrt{1+\pi^2t^2}\,dt = \tag{4}$$
$$= \frac{2}{3\pi^2}[(1+\pi^2t^2)^{3/2}]_0^{5/2} = \tag{5}$$
$$= \frac{2}{3\pi^2}\left(1+\frac{25}{4}\pi^2\right)^{3/2} - \frac{2}{3\pi^2} \tag{6}$$

Problema 3 (9 punti)

Sia $\quad f(x,y) = 1 - \sqrt{-x^2+2x-\frac{1}{4}y^2}\,$.

3.1 Determinare il dominio di f, disegnarlo, e dire se la funzione è di classe $\mathcal{C}^2$. Disegnare, se possibile, il grafico della sezione $y=0$ e la curva di livello $z=1/2$.(3 punti)

Il dominio di f è

$$D_f = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -x^2+2x-\frac{1}{4}y^2 \geq 0\} = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+\frac{1}{4}y^2 \leq 1\}$$

Che corrisponde alla parte interna du una ellisse di centro (1,0) e semiassi $a=1$, $b=2$ (bordo compreso).

La funzione è $\mathcal{C}^2$ in $\{(x,y)\ in\mathbb{R}^2 : (x-1)^2+\frac{1}{4}y^2 < 1\}$ in quanto la radice non è derivabile quando l'argomento è nullo.

Il grafico della sezione è mostrato in Figura 2; il grafico della curva di livello è mostrato in Figura 3.

3.2 Determinare l'esistenza di eventuali punti critici di f e stabilire se tali punti sono di massimo o minimo relativo o di sella. Determinare l'immagine di f. (4 punti)

Il gradiente di f è

$$\nabla f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x-1}{\sqrt{-x^2+2x-y^2/4}} \\ \frac{y}{4\sqrt{-x^2+2x-y^2/4}} \end{pmatrix}$$

Imponendo $\nabla f(x,y) = 0$ si ottiene l'unico punto critico $P=(1,0)$ (interno al dominio)

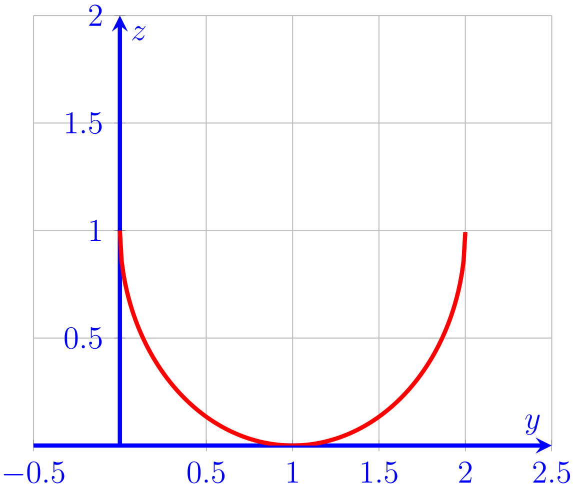


Figura 2: Sezione $y = 0$, $z = 1 - \sqrt{-x^2 + 2x}$

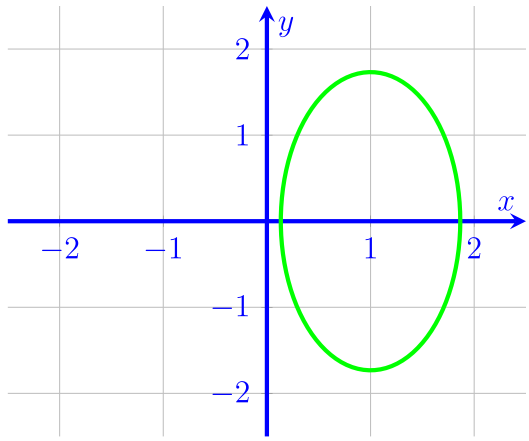


Figura 3: Curva di livello $f(x, y) = 1/2$, equazione: $\frac{4}{3}(x-1)^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$ (ellisse di centro (1,0) e assi $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\sqrt{3}$

P è chiaramente un punto di minimo relativo: la funzione sotto radice è $z = -x^2 + 2x - y^2/4$ è un paraboloide ellittico rivolto verso il basso, con vertice in P (massimo relativo e assoluto). La radice va a considerare la parte del paraboloide in cui esso è positivo (tagliando il resto), ma non cambia il punto di massimo (la funzione $z = \sqrt{-x^2 + 2x - y^2/4}$ è una specie di cupola). Il meno davanti la radice ribalta il grafico facendolo diventare una specie di ciotola (P diventa punto di minimo relativo).

Verifichiamo che P sia punto di minimo usando il test della matrice Hessiana. In un punto (x, y) la matrice Hessiana H_f è

$$H_f(x, y) = \frac{1}{(-x^2 + 2x - y^2/4)^{3/2}} \begin{pmatrix} 1 - y^2/4 & \frac{(x-1)y}{4} \\ \frac{(x-1)y}{4} & \frac{1}{4}(-x^2 + 2x) \end{pmatrix}$$

- P: $H_f(1,0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2}\sqrt{\frac{2}{3}} \end{pmatrix}$, det $(H_f(1,0)) = 1/2$ e il primo termine di $H_f(1,0)$ vale $1 > 0$, quindi H_f è definita positiva in P e P è minimo locale.

Immagine: $[0,1]$ (infatti la funzione vale 1 quando l'argomento della radice si annulla (punti lungo la frontiera del dominio) e vale 0 nel punto di minimo relativo (e assoluto) $f(1,0) = 0$.)

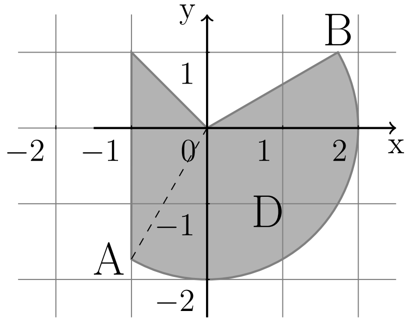
3.3 Determinare il versore di massima crescita nel punto $(1,-1)$ e scrivere lo sviluppo di Taylor del primo ordine rispetto a tale punto. (2 punti)

Il versore di massima crescita corrisponde al gradiente calcolato in $(1,-1)$ e normalizzato: $\nabla f(1,-1) = (0, -\frac{1}{2\sqrt{3}})$ che ha norma $1/(2\sqrt{3})$. Quindi $\mathbf{v} = (0,-1)$.

Il piano tangente ha equazione $z = -\frac{1}{2\sqrt{3}}(y+1) + 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Problema 4 (6 punti)

Sia D il dominio rappresentato in figura dove la curva alla frontiera è un arco di circonferenza di centro $(0,0)$. I vertici A e B hanno coordinate $A = (-1, -\sqrt{3})$, $B = (\sqrt{3}, 1)$. Utilizzare gli integrali doppi per calcolare:



$$I_1 = \int\int_D dx\,dy \quad ; \quad I_2 = \int\int_D xy\,dx\,dy$$

Il dominio D si può pensare come $D = D_1 \cup D_2$ con :

$$D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = \rho\cos(\theta), y = \rho\sin(\theta), \ -\frac{2\pi}{3} \le \theta \le \frac{\pi}{6}, 0 \le \rho \le 2\}$$

$$D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : -1 \le x \le 0, \sqrt{3}x \le y \le -x\}$$

Quindi $\int\int_D dx\,dy = \int\int_{D_1} dx\,dy + \int\int_{D_2} dx\,dy$.

$$\int\int_{D_1} dx\,dy = \int_{-2\pi/3}^{\pi/6} \left(\int_0^2 \rho\,d\rho\right) d\theta = \frac{5}{6}\pi \left[\frac{\rho^2}{2}\right]_0^2 = \frac{5}{3}\pi$$

$$\int\int_{D_2} dx\,dy = \int_{-1}^{0} \left(\int_{\sqrt{3}x}^{-x} 1\,dy\right) dx = \int_{-1}^{0} -x - \sqrt{3}x\,dy = \frac{-1-\sqrt{3}}{2}[x^2]_{-1}^{0} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

Quindi l'area di D vale $\frac{1+\sqrt{3}}{2} + \frac{5}{3}\pi$

Per il secondo integrale:

$$\begin{aligned}\int\int_{D_1} xy\,dx\,dy &= \int_{-2\pi/3}^{\pi/6}\left(\int_0^2 \rho^3\sin(\theta)\cos(\theta)\,d\rho\right)\,d\theta = \\ &= \left(\int_{-2\pi/3}^{\pi/6}\frac{1}{2}\sin(2\theta)\,d\theta\right)\left(\int_0^2\rho^3\,d\rho\right) \\ &= \left[-\frac{\cos(2\theta)}{4}\right]_{-2\pi/3}^{\pi/6}\left[\rho^4/4\right]_0^2 = (-\frac{1}{8}-\frac{1}{8})4 = -1\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int\int_{D_2} xy\,dx\,dy &= \int_{-1}^{0}\left(\int_{\sqrt{3}x}^{-x} xy\,dy\right)\,dx = \\ &= \int_{-1}^{0} x\left[y^2/2\right]_{\sqrt{3}x}^{-x}\,dx = \\ &= \int_{-1}^{0}\frac{1-3}{2}x^3\,dx = \\ &= [-\frac{x^4}{4}]_{-1}^{0} = \frac{1}{4}\end{aligned}$$

Quindi I_2 vale $-3/4$